Dans la division euclidienne de m par 4 ,

$$\begin{cases} m=4q+r \\ 0\leqslant r<4 \end{cases}$$

les restes r possibles sont 0 , 1 , 2 , 3 .

▪ Cas $r=0$ soit $m=4q$ avec $q\in\mathbb{Z}$.

Dans ce cas

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(m) &= m^2+3m-8 \\ &= 4^2q^2+3\times4q-4\times2 \\ &= 4u+0 \end{aligned}$$

où u est l'entier relatif $4q^2+3q-2$.

Ainsi, lorsque $m=4q+0$, le reste dans la division euclidienne de $\mathrm{P}(m)$ par 4 est 0 .

▪ Cas $r=1$ soit $m=4q+1$ avec $q\in\mathbb{Z}$.

Dans ce cas

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(m) &= m^2+3m-8 \\ &= (4q+1)^2+3(4q+1)-8 \\ &= 4^2q^2+2\times4q+1+3\times4q+3-8 \end{aligned}$$

$$=4^2q^2+4\times 5q-4$$

$$=4u+0$$

où u est l'entier relatif $4q^2+5q-1$

Ainsi, lorsque $m=4q+1$, le reste dans la division euclidienne de $\mathrm{P}(m)$ par 4 est 0.

▪ Cas $r=2$ soit $m=4q+2$ avec $q\in\mathbb{Z}$.

Dans ce cas

$$\mathrm{P}(m)=m^2+3m-8$$

$$=(4q+2)^2+3(4q+2)-8$$

$$=4^2q^2+2\times 4q\times 2+4+3\times 4q+6-8$$

$$=4^2q^2+4\times 7q+2$$

$$=4u+2$$

où u est l'entier relatif $4q^2+7q$

Ainsi, lorsque $m=4q+2$, le reste dans la division euclidienne de $\mathrm{P}(m)$ par 4 est 2.

▪ Cas $r=3$ soit $m=4q+3$ avec $q\in\mathbb{Z}$.

Dans ce cas

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(m) &= m^2+3m-8 \\
&= (4q+3)^2+3(4q+3)-8 \\
&= 4^2q^2+2\times 4q\times 3+9+3\times 4q+9-8 \\
&= 4^2q^2+4\times 9q+10 \\
&= 4u+2
\end{aligned}$$

où u est l'entier relatif $4q^2+9q+2$

Ainsi, lorsque $m=4q+3$, le reste dans la division euclidienne de $\mathrm{P}(m)$ par 4 est 2 .

▪ En conclusion, les restes possibles dans la division euclidienne de $\mathrm{P}(m)$ par 4 sont 0 et 2 .